Sharif Civil Engineering Journal (2025), **41**(2), 13-27

Sharif University of Technology

Sharif Civil Engineering Journal

https://sjce.journals.sharif.edu



Research Article

Analysis of Plane Multi-Span Frames with the Analytical Method of Force-Displacement Combination

Amirhosein Bahreini, Ali Asgari*, Alireza Khabiri and Reza Taghipour

Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran.
* corresponding author:(a.asgari@umz.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received: 8 April 2024

Revised: 14 June 2024

Accepted: 19 June 2024

Keywords:

Plane frames,
indeterminate structures,
mixed force-displacement method,
Euler–Bernoulli beam equation, analytical method.

Abstract

This paper investigates the effectiveness of the mixed forced-displacement method for solving indeterminate plane frames that combine force and displacement relations based on the beam's axial and bending deformation behavior simultaneously. In this method, the differential equations of all structural members are determined based on the general theory of the Bernoulli beam by considering the axial effects. In the following, with the help of an analytical solution and application of boundary conditions, the integral constants of the equations related to the uniaxial frames of the structure are obtained. For the effectiveness of the proposed method, three examples of common frames have been analyzed and validated with the finite element method. The results show that the answers determined by the two methods are completely consistent. One of the advantages of the combined displacement-force method is determining the parametric solution as well as the high accuracy of this method. In addition, it does not need post-processing to find the quantity of kinematic and static responses. Therefore, this method can be used as an alternative approach to the finite element method in solving multi-axial plane frames. Moreover, its capability to handle intricate loading and various boundary condition configurations highlights the method's efficiency. Furthermore, the method simplifies the simultaneous influences of material and geometric nonlinearities in the analysis process. Material nonlinearities, such as yielding and hardening, are accommodated by adjusting the stiffness matrix. In contrast, geometric nonlinearities arising from significant displacements are addressed through iterative updates of the displacement field until convergence is achieved. In summary, the mixed displacement-force method is a comprehensive and efficient tool for 2D frame analysis. The ability to provide accurate results without the need for complex numerical simulations increases the importance of this method in the range of structural analysis techniques. Future research efforts could examine developing the process to three-dimensional frames and investigating its application in the performance-based design and analysis areas.

Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper**.**

Authors contribution statement

First name and Last name of Frist Author: Amirhosein Bahreini

First name and Last name of Second Author: Ali Asgari

To Cite this article:
Bahreini, A.H., Asgari, A., Khabiri, A.R. and Taghipour, R. 2025. Analysis of plane multi-span frames with the analytical method of force-displacement combination, Sharif Civil Engineering Journal, **41**(2), 13-27.
https://doi.org/10.24200/j30.2024.64303.3318

E-ISSN: 2676-4776 © 2025 The Author(s). Sharif Civil Engineering Journal, Published by Sharif University of Technology

This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.

مجله علمی مهندسی عمران شریف

https://sjce.journals.sharif.edu

مقاله‌ی پژوهشی

تحلیل قاب‌های صفحه‌ای دوبُعدی با روش تحلیلی ترکیب نیرو- جابجایی

امیرحسین بحرینی، علی عسگری*، علیرضا خبیری و رضا تقی‌پور

دانشکده‌ی مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، مازندران.

*نویسنده مسئول (a.asgari@umz.ac.ir)

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت : ۱۴۰۳/۰۱/۲۰

تاریخ اصلاحیه : ۱۴۰۳/۰۳/۲۵

تاریخ پذیرش : ۱۴۰۳/۰۳/۳۰

واژگان کلیدی:

قاب‌های صفحه‌ای،

سازه‌های نامعین،

روش ترکیبی نیرو- جابجایی،

معادله‌های تیر اویلر- برنولی،

روش تحلیلی.

چکیده

در پژوهش حاضر به بررسی کارایی یک روش پیشنهادی برای حل قاب‌های صفحه‌ای نامعین پرداخته شده است، که از ترکیب روابط نیرو و جابجایی براساس رفتار تغییرشکل محوری و خمشی تیر به طور هم‌زمان بهره می‌برد. در روش پیشنهادی، ابتدا معادله‌های دیفرانسیلی اعضاء سازه‌ای براساس تئوری کلی تیر اویلر- برنولی با درنظرگرفتن آثار محوری تعیین شده و سپس با کمک حل تحلیلی و اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های انتگرالی معادله‌های مرتبط با قاب‌ها به‌دست آمده‌اند. برای میزان کارآیی روش پیشنهادی، سه مثال از قاب‌های صفحه‌ای متداول تحلیل و با کمک روش اجزاء محدود اعتبارسنجی انجام شده‌اند. نتایج نشان داده‌اند که پاسخ‌های تعیین‌شده از دو روش مذکور، تطابق خوبی دارند. از مزیت‌های روش ترکیبی نیرو- جابجایی، تعیین حل پارامتریک و همچنین قابلیت دستیابی به پاسخ‌ها در هر نقطه‌ی دلخواه از سازه با دقت بالاست.. علاوه‌بر آن، برای یافتن کمیت پاسخ سینماتیکی و استاتیکی نیازی به پس‌پردازش ندارد. لذا روش ترکیبی نیرو- جابجایی می‌تواند به‌عنوان یک رویکرد جایگزینی برای روش‌های رایج در حل قاب‌های صفحه‌ای چندمحوری استفاده شود.

۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین مسائل تحلیل سازه‌ها، یافتن روش تحلیلی دقیق قاب‌های صفحه‌ای نامعین است. استفاده از رویکرد معادله‌های دیفرانسیل می‌تواند به‌عنوان یک ابزار کلی برای حل قاب‌های صفحه‌ای در نظر گرفته شود. تعمیم روش‌های مبتنی بر معادله‌های دیفرانسیل برای قاب‌های چندمحوری موضوعی حائز اهمیت است. بعضی معادله‌های حاکم بر سازه، تکینگی دارند؛ که حل آن‌ها با رویکرد تک‌محوری حل‌شدنی نیست. نوشتارهای: مکالی[1] (۱۹۱۹)،[۱] برونگرابر[2] (۱۹۶۵)،[۲] کار فالسون[3] (۲۰۰۲)،[۳] و برخی دیگر از پژوهشگران،[۴-۱۴] استفاده از رویکردهای ترکیبی را توصیه کرده‌اند.

به‌منظور یافتن پاسخ‌های معادله‌های ذکرشده، تلاش‌های بسیاری صورت پذیرفته است. پژوهشگران با استفاده از روش‌های تحلیلی، نیمه‌تحلیلی، و عددی به حل آن‌ها پرداخته‌اند، اما یافتن یک روش دقیق و ساده که بتواند تمامی مسائل را پوشش دهد، می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های عددی، مانند اجزاء محدود، کانی، شیب افت، و غیره باشد.[۱۵] کارهای انجام‌شده در این زمینه بسیار گسترده است. تحلیل دینامیکی غیرخطی قاب پرتال،[۱۶] پیش‌بینی تغییرشکل قاب‌های ساده‌ی بتنی با استفاده از یک رویکرد غیرمستقیم،[۱۷] تحلیل غیرخطی قاب‌های ساده با تعامل بین تغییرشکل‌های برشی و خمشی،[۱۸] محاسبه‌ی تغییرمکان سازه تحت اثر پیچش با فرض رفتار غیرخطی سازه،[۱۹] طراحی دال‌های دوطرفه و بهینه‌سازی آن با استفاده از معادله‌های ریاضی،[۲۰] تحلیل و طراحی قاب‌های فولادی،[۲۱] تحلیل دینامیکی سازه با استفاده از رویکردهای انتگرال‌گیری عددی،[۲۲] تحلیل سازه‌های بتنی با استفاده از روش نیرو و جابجایی،[۲۳] شبیه‌سازی پاسخ سازه‌ها در برابر زمین‌لرزه با استفاده از روابط ترکیب نیرو- جابجایی،[۲۴ و ۲۵] طراحی لرزه‌ای سازه‌های بتنی و فولادی با استفاده از روش نیرو- جابجایی،[۲۶] تحلیل قاب‌های دوگانه به روش کانی،[۲۷] تحلیل ارتعاش خطوط لوله با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به‌عنوان یک روش نیمه‌تحلیلی،[۲۸] تحلیل عددی و مطالعه‌ی پارامتریک بر قاب‌های چنددرجه‌ی آزادی،[۲۹] حل قاب‌های پیچیده،[۳۰] روش جابجایی اجزاء محدود برای قاب‌ها،[۳۱] روش جابجایی از کارنوسکی[4] و همکاران (۲۰۲۱)[۳۲] و تونیولو و تونیولو[5]،[۳۳] تحلیل المان تیر قاب‌های کشسان‌خمیری برای یک جابجایی بزرگ،[۳۴] روش‌های تغییرشکل و المان برای قاب‌ها،[۳۵] تحلیل

[1] Macaulay
[2] Brungraber
[3] Falsone
[4] Karnovsky
[5] Toniolo

استناد به این مقاله:

بحرینی، امیرحسین، عسگری، علی، خبیری، علیرضا و تقی پرور، رضا، ۱۴۰۴. تحلیل قاب‌های صفحه‌ای دوبُعدی با روش تحلیلی ترکیب نیرو- جابجایی . مهندسی عمران شریف، ۴۱(۲)، صص.۱۳-۲۷. https://doi.org/10.24200/j30.2024.64303.3318

حق مولف © نویسندگان

شاپا الکترونیکی: ۲۶۷۶-۴۷۷۶

ناشر: دانشگاه صنعتی شریف

قاب‌های غیرخطی با استفاده از روش نیرو،[۳۶ و ۳۷] روش نیرویی توسعه‌یافته برای تحلیل سازه‌های دارای پیش‌تنیدگی استاتیکی و سینماتیکی نامعین پایدار،[۳۸] روش ماتریس انتقال برای قاب‌های دیوار برشی،[۳۹] طراحی لرزه‌ای به روش ترکیبی نیرو- جابجایی برای قاب‌های فولادی،[۴۰] از جمله مواردی است که در راستای تحلیل و طراحی تیرها و تعمیم آن برای قاب‌های صفحه‌ای صورت پذیرفته است.

روش‌های مرسوم معمولاً فقط یکی از روش‌های جابجایی و یا نیرویی را به‌کار می‌گیرند. تحلیل با روش‌های مبتنی بر سختی با افزایش نامعینی سازه‌ها به روش‌های نرمی ترجیح داده می‌شود، شایان ذکر است که روش‌های نیرویی برای سازه‌ها با درجه‌ی نامعینی، کمتر کاربردی هستند. ترکیب روش‌های مبتنی بر نیرو- جابجایی می‌تواند محدودیت هر یک از روش‌های مستقل نیرویی یا جابجایی را مرتفع کند. در روش ترکیبی نیرو- جابجایی ، مدل‌سازی معادله‌های حاکم (خمشی و محوری) هر عضو صورت پذیرفته و پس از تحلیل اولیه، ۶ مجهول به‌صورت ثابت‌های انتگرال ظاهر شده‌اند. به‌طورکلی، برای تعیین ۶ ثابت انتگرالی باید شرایط مرزی متناظر با هر یک از المان‌ها اعمال شود. از نظر مزایای محاسباتی در روش پیشنهادی می‌توان گفت که درنهایت باید معادله‌ی ماتریسی حل شود تا به مجهول‌های مسئله رسید و محاسبات پیچیده‌ای در کار نیست؛ اما در مورد معایب محاسباتی روش مذکور می‌توان گفت که هر چه سازه بزرگ‌تر باشد، ماتریس نهایی به نسبت بزرگ می‌شود و فقط زمان و حجم محاسبات بالا می‌رود. این تذکر لازم است که این مورد در روش‌های دیگر نیز صادق است.

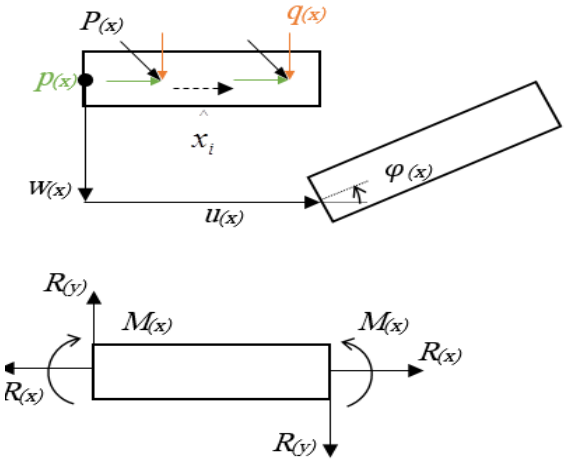
در مقایسه با روش پیشنهادی، آنالیز ماتریسی متداول برای تحلیل سازه‌ها فقط با استفاده از یک ماتریس سختی و یا نرمی استفاده می‌کند و می‌تواند برای سازه‌های ساده‌تر مناسب باشد؛ اما روش ترکیبی نیرو-جابجایی به‌صورت خاص برای تحلیل سازه‌های پیچیده‌تر و نامعین استفاده می‌شود و از ترکیب دو روش سختی و نرمی استفاده می‌کند. در مورد حجم و سرعت، آنالیز ماتریسی معمولاً کمتر و سریع‌تر است، اما دقت آن ممکن است در برخی موارد محدود باشد؛ در حالی که حجم محاسبه‌های روش ترکیبی نیرو-جابجایی بیشتر است، اما دقیق است و می‌تواند نتایج بهتری برای سازه‌های پیچیده ارائه دهد. از طرفی دیگر، اعمال شرایط مرزی بر معادله‌های حاکم در روش پیشنهادی در مقایسه با تحلیل ماتریسی ساده‌تر است. به‌طورکلی، انتخاب بین دو روش اخیر به نوع سازه، درجه‌ی نامعینی آن، دقت موردنیاز و منابع محاسباتی در دسترس بستگی دارد.

هدف از پژوهش حاضر، توسعه‌ی رویکرد معادله‌های دیفرانسیل در مورد قاب‌های چندمحوری است. در نوشتار حاضر، ابتدا به روابط روش نیرو- جابجایی پرداخته و سپس سه قاب استاتیکی با افزایش تدریجی تعداد اعضا و دهانه‌ها برای نشان‌دادن کارایی روش ارائه شده‌اند. به‌منظور اعتبارسنجی روش نیرو-جابجایی، قاب‌ها به کمک روش اجزاء محدود، تحلیل و پاسخ‌ها با روش پیشنهادی نیرو- جابجایی مقایسه شده‌اند. در پایان، به نتیجه‌گیری پژوهش حاضر پرداخته شده است.

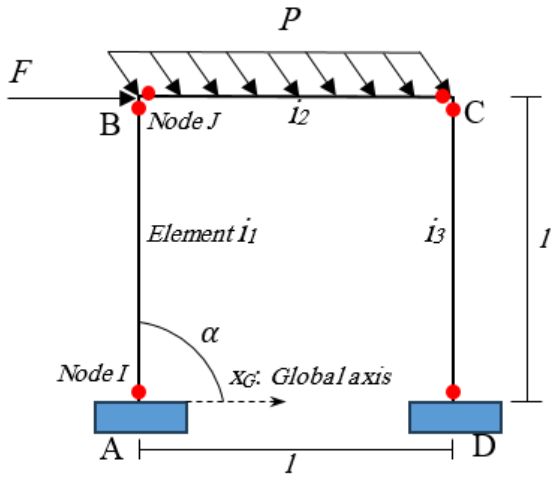
۲. روش ترکیب نیرو- جابجایی

برای هر عضو از سازه، ابتدا مختصات محلی و درجه‌های آزادی مطابق شکل ۱ معرفی شده است.[۱۵]

شکل ۲ را درنظر بگیرید:



شکل ۱. درجه‌های آزادی و محور مختصات محلی.



شکل ۲ قاب ساده‌ی یک دهنه با ۳ المان تحت نیروی گسترده و متمرکز جانبی.

برای اعضاء تیر- ستون به‌صورت افقی یا عضو ستون به صورت قائم، معادله‌های تغییرشکل به صورت روابط ۱ و ۲ تعریف می‌شوند:[۱۵]

$$u_{(\hat{x}_i)} = -\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{(\hat{x}_i)} + c_{i,1}\hat{x}_i + c_{i,2} \quad (۱)$$

$$w_{(\hat{x}_i)} = \frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{(\hat{x}_i)} + c_{i,3}\frac{\hat{x}_i^3}{6} + c_{i,4}\frac{\hat{x}_i^2}{2} + c_{i,5}\hat{x}_i + c_{i,6} \quad (۲)$$

که در آن‌ها، E مدول کشسانی، A مساحت سطح مقطع، I ممان دوم سطح، i شماره‌ی المان، p شدت بار محوری وارد بر المان، q شدت بار قائم وارده بر المان، و c_i ها ثابت‌های انتگرالی یا مجهول‌های مسئله هستند. شایان ذکر است که در روابط ۱ و ۲ و روابط بعد، از علائم $p^{(2)}_{(\hat{x}_i)}$ و $q^{(4)}_{(\hat{x}_i)}$ و از علائم اختصاری برای انتگرال‌گیری استفاده شده است. $\iint p_{\hat{x}_i} dx$ به معنای $p^{(2)}_{(\hat{x}_i)}$ و $q^{(4)}_{(\hat{x}_i)}$ به معنای $\iint\iint q_{\hat{x}_i} dx$ است. حال به‌منظور اعمال شرایط مرزی لازم است که معادله‌ها برای هر یک از دو گره‌ی ابتدایی و انتهایی المان بسط داده شوند، که معادلات اخیر به این صورت درمی‌آیند.

$$P\times\cos\theta = p$$
$$P\times\sin\theta = q$$

لازم است قبل از این کار به‌منظور تفکیک بارهای گسترده‌ی محوری و قائم از یکدیگر، شدت بار گسترده‌ی اعمال‌شده بر روی المان (P) را به دو بار p، که شدت بار محوری و q (رو به پایین مثبت)، که شدت بار قائم هستند، تجزیه کرد. همچنین زاویه‌ی بار با محورعضو (θ) از سمت چپ به صورت ساعت‌گرد مثبت در نظر گرفته شود.

نکته‌ی دیگری که باید در نظر گرفته شود، این است که برای به‌دست‌آوردن تغییرشکل‌های قاب به سه مجهول تغییرشکل و سه مجهول واکنش تکیه‌گاهی در هرگره نیاز است. برای گره‌های I و J، معادله‌های مسئله به صورت روابط ۳ الی ۱۴ هستند:

$$u_i^{(I)} = u_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = -\frac{1}{(EA)_i}p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,2} \quad (۳)$$

$$w_i^{(I)} = w_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = \frac{1}{(EI)_i}q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,6} \quad (۴)$$

$$\varphi_i^{(I)} = \varphi_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = -\frac{1}{(EI)_i}q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,5} \quad (۵)$$

$$R^{(I)}_{\hat{x}_i} = -(EA)u'_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} - (EA)_i c_{i,1} \quad (۶)$$

$$R^{(I)}_{\hat{y}_i} = (EI)_i w'''_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + (EI)_i c_{i,3} \quad (۷)$$

$$M_i^{(I)} = (EI)_i w''_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + (EI)_i c_{i,4} \quad (۸)$$

$$u_i^{(J)} = u_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = -\frac{1}{(EA)_i}p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + l_i c_{i,1} + c_{i,2} \quad (۹)$$

$$w_i^{(J)} = w_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = \frac{1}{(EI)_i}q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + \frac{l_i^3}{6}c_{i,3} + \frac{l_i^2}{2}c_{i,4} + l_i c_{i,5} + c_{i,6} \quad (۱۰)$$

$$\varphi_i^{(J)} = \varphi_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = -\frac{1}{(EI)_i}q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - \frac{l_i^2}{2}c_{i,3} - l_i c_{i,4} - c_{i,5} \quad (۱۱)$$

$$R^{(J)}_{\hat{x}_i} = -p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + (EA)_i c_{i,1} \quad (۱۲)$$

$$R^{(J)}_{\hat{y}_i} = -q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - (EI)_i c_{i,3} \quad (۱۳)$$

$$M_i^{(J)} = -q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - (EI)_i l_i c_{i,3} - (EI)_i c_{i,4} \quad (۱۴)$$

معادله‌های ۵ و ۱۱، تغییرشکل دورانی در گره‌های I و J؛ معادله‌های ۶ و ۱۲، نیروی داخلی محوری؛ معادله‌های ۷ و ۱۳، نیروی داخلی برشی؛ و معادله‌های ۸ و ۱۴، لنگر به‌وجودآمده در گره‌ها هستند. به‌منظور ساده‌نویسی، هر یک از معادله‌های تغییرشکل‌ها و نیرویی را می‌توان به‌صورت گروه‌های ماتریسی نوشت. شایان ذکر است که در ماتریس‌های ۱۵ الی ۱۸، K=I,J شماره‌ی گره‌هاست.

$$\hat{u}_i^{(K)} = \hat{A}_i^{(K)} c_i - a_i^{(K)} \quad (۱۵)$$

$$\hat{r}_i^{(K)} = \hat{B}_i^{(K)} c_i - b_i^{(K)} \quad (۱۶)$$

$$\hat{u}_i^{(K)} = [u_i^{(K)} \quad w_i^{(K)} \quad \varphi_i^{(K)}]^T \quad (۱۷)$$

$$\hat{r}_i^{(K)} = [R^{(K)}_{\hat{x}_i} \quad R^{(K)}_{\hat{y}_i} \quad M_i^{(K)}]^T \quad (۱۸)$$

نکته‌ی دیگر در معادله‌های ماتریسی اخیر علامت (^) است، که نشانگر محلی[1] بودن معادله‌های هر المان است. همچنین $\hat{u}_i^{(K)}$ و $\hat{r}_i^{(K)}$ به ترتیب معادله‌های تغییرشکل‌ها و واکنش‌های نیرویی تکیه‌گاهی را ارائه می‌کنند. c_i ها همان مجهول‌های موجود در معادله‌ی تغییرشکل هستند، که از انتگرال‌گیری به‌وجود آمده‌اند و تعداد آن‌ها برای هر المان، ۶ ثابت انتگرالی است، ولی تعداد مجهول‌های کلی برای المان‌ها ۱۲ ثابت انتگرالی است، یعنی هر گره، ۶ ثابت دارد، که همان تغییرشکل و واکنش‌ها هستند. $\hat{A}_i^{(K)}$ ضرایب c_i ها یا ثابت‌های انتگرالی در معادله‌های تغییرشکل و $\hat{B}_i^{(K)}$ ضرایب c_i ها یا ثابت‌های انتگرالی در معادله‌های واکنش‌ها هستند، که مقدار آن‌ها به صورت روابط ۱۹ الی۲۲ تعریف می‌شود.

$$\hat{A}_i^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

$$\hat{A}_i^{(J)} = \begin{bmatrix} l_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i^3}{6} & \frac{l_i^2}{2} & l_i & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{l_i^2}{2} & -l_i & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

$$\hat{B}_i^{(I)} = \begin{bmatrix} -(EA)_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (EI)_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (EI)_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

$$\hat{B}_i^{(J)} = \begin{bmatrix} (EA)_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(EI)_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(EI)_i l_i & -(EI)_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

در حالت کلی، $\hat{A}_i^{(K)}$ تابعی از طول المان‌ها و عدد، و $\hat{B}_i^{(K)}$ تابعی از سختی محوری، سختی خمشی، طول، و عدد هستند. $a_i^{(K)}$ و $b_i^{(K)}$ بستگی به بارهای خارجی وارد بر المان دارند (روابط ۲۳ الی ۲۶):

[1] Local

$$\hat{a}_i^{(I)} = [\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0} \quad -\frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0} \quad \frac{1}{(EI)_i} q^{(3)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0}]^T \tag{۲۳}$$

$$\hat{a}_i^{(J)} = [\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i} \quad -\frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i} \quad \frac{1}{(EI)_i} q^{(3)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i}]^T \tag{۲۴}$$

$$\hat{b}_i^{(I)} = [-p^{(1)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0} \quad -q^{(1)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0} \quad -q^{(2)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=0}]^T \tag{۲۵}$$

$$\hat{b}_i^{(J)} = [p^{(1)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i} \quad q^{(1)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i} \quad q^{(2)}_{\hat{(x_i)}/\hat{x_i}=l_i}]^T \tag{۲۶}$$

جالب است که در $\hat{a}_i^{(K)}$، سختی‌ها هم دخیل هستند ولی در $\hat{b}_i^{(K)}$، که مربوط به واکنش‌های تکیه‌گاهی است، اثری از سختی مشاهده نمی‌شود. اگر این دو ضریب با هم مقایسه شوند، رابطه‌ای مشخص می‌شود که نیرو و جابجایی را به هم مرتبط می‌کند. در واقع، ۱۲ مجهولی که ۶ مجهول در هر گره بود، را به ۳ مجهول در هر گره، که همان c_iها هستند، تبدیل می‌کند. یا به‌عبارتی دیگر، روشی که از آن به عنوان روش ترکیب نیرو- جابجایی[2] یاد می‌شود، با ترکیب معادله‌های تغییرشکل و نیرویی مجهول‌های معادله‌ای (u و w و φ و $\hat{R}_x$ و $\hat{R}_y$ و M) را به ۶ مجهول c_i تبدیل می‌کند. حال برای سادگی کار می‌توان شرایط مرزی را برای گره‌هایی که تکیه‌گاه بسته[3] دارند، به دلیل اینکه ماتریس دوران[4] در آن اثر نمی‌گذارد, اعمال کرد. نکته‌ی دیگری که باید در نظرگرفت، این است که اگر این کار برای حالت‌های کلی بسط داده شود، باید ماتریس دوران را در هر یک از گره‌ها به‌دست آورد و ماتریس به‌دست‌آمده‌ی مذکور باید شرایط مرزی را ارضا کند. فرض شود در گره‌ی I تکیه‌گاه گیردار باشد، در این صورت روابط تغییرشکل را می‌توان به صورت روابط ۲۷ و ۲۸ نوشت:

$$\hat{u}_1^{(I)} = 0 \rightarrow \hat{A}_1^{(I)} \; c_1 = \hat{a}_1^{(I)} \tag{۲۷}$$

$$\hat{u}_3^{(I)} = 0 \rightarrow \hat{A}_3^{(I)} \; c_3 = \hat{a}_3^{(I)} \tag{۲۸}$$

چهار گروه معادله‌ها، که در رابطه‌های ۱۵ و ۱۶بیان شده‌اند، خود شامل ۱۲ معادله و ۱۲ مجهول هستند. همان‌طور که استنباط می‌شود، در یک المان تعداد مجهول‌های تغییرمکان و نیرویی برای دو گره، ۱۲ عدد است؛ اما با توجه به معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر کل المان می‌توان ۱۲ مجهول اخیر را به ۶ مجهول، که همان ثابت‌های معادله‌ی دیفرانسیل هستند، تبدیل کرد. اگر به معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تیر توجه شود، برای نمونه در روابط ۱ و ۲، تغییرشکل با رابطه‌ای به نیرو ارتباط یافته است. رابطه‌ی بین تغییرشکل و نیرو هنگامی حاصل می‌شود که سه رابطه‌ی ساختاری، سینماتیکی، و استاتیکی با هم ترکیب شوند.

مجهول‌های مسئله به بردار $\{c_1^j, c_2^j, ..., c_n^j\}^T$ تبدیل شده‌اند، که در آن n تعداد المان و j=1,2,…,6مجهول‌های مسئله هستند. برای حل سیستم اخیر، باید شرایط سازگاری و تعادل گره‌های آزاد نوشته شود. برای نوشتن معادله‌های تعادل و سازگاری، ابتدا نیاز است که همه‌ی کمیت‌های استاتیکی و سینماتیکی به یک محور کلی ارجاع شوند. ماتریس G یا دوران به‌منظور عبور از مختصات محلی به صورت رابطه‌ی ۲۹ تعریف می‌شود.

$$G_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

α_i زاویه‌ی بین محور محلی و کلی (x_G)[5] است. محور محلی در راستای المان و محور کلی در راستای افق است. شرط سازگاری در گره‌های غیرمقید باید نوشته شود. از نظر فیزیکی در گره‌هایی که دو المان به هم متصل هستند و قید خارجی ندارند، تغییرشکل‌ها با هم برابر هستند. همچنین با نوشتن معادله‌های تعادل در گره‌های مذکور، مجموع واکنش‌های داخلی اعضا نیز با نیروی وارده بر آن گره با هم برابر هستند. به‌عنوان مثال، $u_1^{(J)} = u_2^{(I)}$ بدان معناست که تغییرشکل انتهای المان ۱ با تغییرشکل ابتدای المان ۲ برابر است. روابط ۳۰ الی۴۱ برای گره های غیرمقید در شکل ۲ ارائه شده‌اند.

$$u_1^{(J)} = u_2^{(I)} \rightarrow \hat{G}_1 \hat{u}_1^{(J)} = \hat{G}_2 \hat{u}_2^{(I)} \tag{۳۰}$$

$$\hat{G}_1 \hat{A}_1^{(J)} \; c_1 - \hat{G}_2 \hat{A}_2^{(I)} \; c_2 = \hat{G}_1 \hat{a}_1^{(J)} - \hat{G}_2 \hat{a}_2^{(I)} \tag{۳۱}$$

$$A_1^{(J)} \; c_1 - A_2^{(I)} \; c_2 = a_1^{(J)} - a_2^{(I)} \tag{۳۲}$$

$$r_1^{(J)} + r_2^{(I)} = f^B \rightarrow \hat{G}_1 \hat{r}_1^{(J)} + \hat{G}_2 \hat{r}_2^{(I)} = f^B \tag{۳۳}$$

$$\hat{G}_1 \hat{B}_1^{(J)} \; c_1 + \hat{G}_2 \hat{B}_2^{(I)} \; c_2 = \hat{G}_1 \hat{b}_1^{(J)} + \hat{G}_2 \hat{b}_2^{(I)} + f^B \tag{۳۴}$$

$$B_1^{(J)} \; c_1 + B_2^{(I)} \; c_2 = b_1^{(J)} + b_2^{(I)} + f^B \tag{۳۵}$$

$$u_2^{(J)} = u_3^{(J)} \rightarrow \hat{G}_2 \hat{u}_2^{(J)} = \hat{G}_3 \hat{u}_3^{(J)} \tag{۳۶}$$

$$\hat{G}_2 \hat{A}_2^{(J)} \; c_2 - \hat{G}_3 \hat{A}_3^{(J)} \; c_3 = \hat{G}_2 \hat{a}_2^{(J)} - \hat{G}_3 \hat{a}_3^{(J)} \tag{۳۷}$$

$$A_2^{(J)} \; c_2 - A_3^{(J)} \; c_3 = a_2^{(J)} - a_3^{(J)} \tag{۳۸}$$

$$r_2^{(J)} + r_3^{(J)} = f^C \rightarrow \hat{G}_2 \hat{r}_2^{(J)} + \hat{G}_3 \hat{r}_3^{(J)} = f^C \tag{۳۹}$$

$$\hat{G}_2 \hat{B}_2^{(J)} \; c_2 + \hat{G}_3 \hat{B}_3^{(J)} \; c_3 = \hat{G}_2 \hat{b}_2^{(J)} + \hat{G}_3 \hat{b}_3^{(J)} + f^C \tag{۴۰}$$

$$B_2^{(J)} \; c_2 + B_3^{(J)} \; c_3 = b_2^{(J)} + b_3^{(J)} + f^C \tag{۴۱}$$

[2] Mixed Force-Displacement Method
[3] Fixed
[4] Rotation Matrix
[5] Global

این تذکر لازم است که در معادله‌های اخیر، ماتریس f متشکل از نیروهای خارجی وارد بر هر گره از سازه و نام هر گره در بالای آن نوشته شده است. حال شکل ماتریسی معادله‌های ۲۷، ۲۸، ۳۲، ۳۵، ۳۸، و ۴۱ به صورت روابط ۴۲ الی ۴۵ ارائه شده است، که با حل آن‌ها مجهول‌های مسئله به‌دست می‌آیند.

$$Dc = d \tag{۴۲}$$

$$D = \begin{bmatrix} A_1^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{(I)} \\ A_1^{(J)} & -A_2^{(I)} & 0 \\ B_1^{(J)} & B_2^{(I)} & 0 \\ 0 & A_2^{(J)} & -A_3^{(J)} \\ 0 & B_2^{(J)} & B_3^{(J)} \end{bmatrix} \tag{۴۳}$$

$$d = \begin{bmatrix} a_1^{(I)} \\ a_3^{(I)} \\ a_1^{(J)} - a_2^{(I)} \\ b_1^{(J)} + b_2^{(I)} + f^B \\ a_2^{(J)} - a_3^{(J)} \\ b_2^{(J)} + b_3^{(J)} + f^C \end{bmatrix} \tag{۴۴}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{۴۵}$$

شایان ذکر است که معادله‌ی ۴۲ خود وابسته به روابط ۱۹ الی ۲۶ است. مجهول‌های معادله‌های اخیر، ماتریس c است، که هر درایه‌ی آن از ماتریس‌های c_1 ، c_2، و c_3 تشکیل شده است. هر یک از ماتریس‌های c_i یک بردار ستونی ۶ مؤلفه‌ای است، که درنهایت برای مثال ماتریس c یک بردار ستونی ۱۸ مجهولی برای یک قاب ساده‌ی سه‌المانی است.

۳. الگوریتم حل برای قاب‌های با تعداد اعضاء دلخواه

با توسعه‌ی روش پیشنهادی ذکرشده، درنهایت معادله‌ی ۴۲ به‌دست می‌آید، که یک معادله‌ی ماتریسی است، که برای حل آن می‌توان از نرم‌افزارهای مخصوص حل معادله‌های ریاضی استفاده کرد. معادله‌ی ۴۲، را، که معادله‌ی نهایی برای حل قاب‌های چنددهانه‌ی دوبُعدی به روش ترکیب نیرو- جابجایی است، می‌توان برای هر قابی با تعداد n عضو توسعه داد. به‌طورکلی، ماتریس D خود متشکل از ماتریس‌های دیگری، از جمله ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ ، $\hat{B}_i^{(K)}$ و ماتریس صفر است. تعداد ستون‌های ماتریس D برابر با n (تعداد المان) و تعداد سطرهای آن برابر با ۲n است. از آنجایی که ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ و $\hat{B}_i^{(K)}$ ، به صورت ۶×۳ هستند؛ درنهایت ماتریس D به یک ماتریس ۶n×۶n تبدیل می‌شود. ترتیب قرارگیری ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ و $\hat{B}_i^{(K)}$ اینگونه است که ابتدا با شماره‌گذاری المان‌ها از سمت چپ به راست در سطرهای اول، گره‌هایی که در آن‌ها تکیه‌گاه وجود دارد (مقید) نوشته می‌شوند، سپس با نوشتن معادله‌های تعادل در گره‌های دیگر با رعایت‌کردن حرکت از سمت چپ به راست دیگر سطرهای ماتریس هم نوشته می‌شود. معادله‌های ۳۲، ۳۵، ۳۸، و ۴۱ از نوشتن معادله‌های تعادل برای شکل ۲ در گره‌های غیرمقید B و C به‌دست آمده‌اند، که به ترتیب در ماتریس D قرار گرفته‌اند. ماتریس c، که از مجهول‌های مسئله تشکیل شده است، با حل معادله‌ی ۴۲ به‌دست می‌آید. ماتریس d، که تعداد سطر های آن ۲n و تعداد ستون آن همیشه ۱ است، از ماتریس های $\hat{a}_i^{(K)}$ و $\hat{b}_i^{(K)}$ تشکیل شده است، که آن‌ها خود ماتریس‌های ۳×۱ هستند؛ در نتیجه، ماتریس d به یک ماتریس ۶n×۱ تبدیل می‌شود. ترتیب نوشتن آن هم مانند ماتریس D است، یعنی ابتدا از سمت چپ گره‌های مقید و بعد از آن گره‌های غیرمقید نوشته می‌شود. درنهایت، برای حل معادله‌ی ۴۲، بردار مجهول‌ها از ضرب ماتریس d در معکوس ماتریس D حاصل می‌شود.

۴. مثال‌های عددی و بررسی نتایج

در بخش حاضر، به‌منظور نشان‌دادن کارایی روش پیشنهادی، سه قاب صفحه‌ای با افزایش تدریجی اعضا و دهانه‌ها تحلیل شده‌اند. این تذکر لازم است که روش پیشنهادی تحت کدی در محیط نرم‌افزار Mathematica ver ۱۲.۰.۰ و روش اجزاء محدود در بستر نرم‌افزار OpenSees،[۴۱ و ۴۲] توسعه داده شده است. به‌منظور شبکه‌بندی روش اجزاء محدود در هر سه قاب انتخاب‌شده، اعضا از نوع beam element و در شبکه‌بندی به ازاء هر ۰/۵ متر یک المان در نظر گرفته شده‌اند.

۱.۴. مثال اول

یک قاب سه عضوی مطابق شکل ۲ با این مشخصات در نظر گرفته شده است:

$$l = 5m \qquad P = 3.0\times10^{3}\,\frac{N}{m}$$
$$A = 0.12m^2 \qquad F = 15000N$$
$$I = 1.6\times10^{-3}\,m^4$$
$$E = 2.0\times10^{10}\,\frac{N}{m^2}$$

۱.۱.۴. معادله‌های حاکم بر هر المان (i شماره‌ی المان است).

$$W_{x_i} = \frac{P_i\times\mathrm{Sin}(\theta_i)}{EI}\times\frac{x_i^4}{24} + c_{i,3}\times\frac{x_i^3}{6} + c_{i,4}\times \frac{x_i^2}{2} + c_{i,5}\times x_i + c_{i,6}$$

$$M_{x_i} = -P_i\times\mathrm{Sin}(\theta_i)\times\frac{x_i^2}{2} - (c_{i,3}\times x_i + c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i} = -P_i\times\mathrm{Sin}(\theta_i)\times x_i - c_{i,3}\times EI$$

که در آن‌ها، W خیز، M لنگر، و T برش است. با حل معادله‌ی ۴۲ برای شکل ۲، مقدار ماتریس c به‌دست می‌آید، که در پیوست ۱ به آن اشاره شده است.

۲.۱.۴. با قراردادن مقادیر ماتریس c در معادله‌های حاکم بر هر المان در زیربخش ۱.۱.۴، معادله‌های خیز، لنگر، و برش هر المان به‌دست می‌آیند. مقادیر معادله‌های اخیر در بازه‌ی ۰ تا l (طول المان) تعیین می‌شود و با مقادیر

جدول ۱. مقایسه‌ی لنگر به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

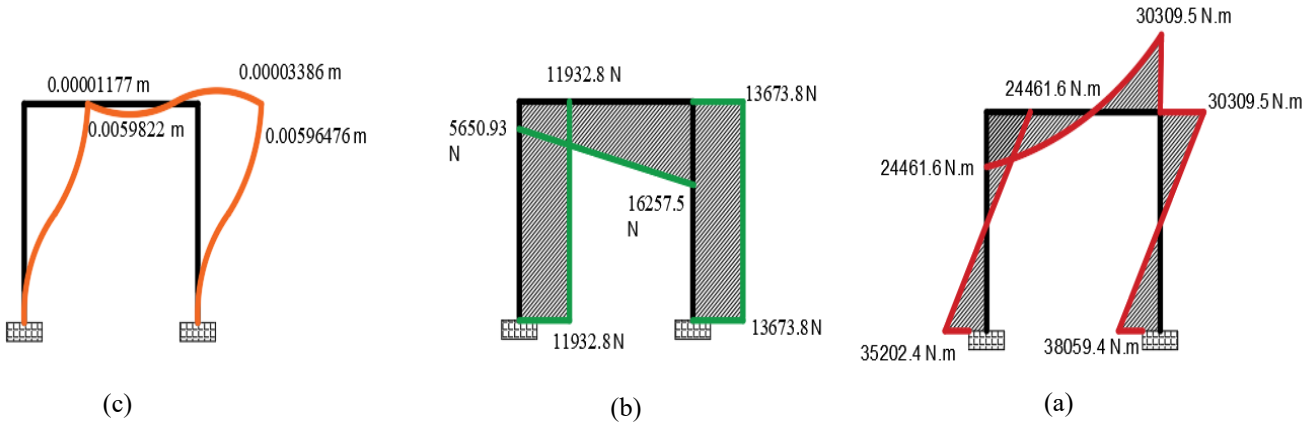
Number of Element	Bending Moment					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	-35202.4	24461.6	35202.4	-35202	24462	35202
Element2	-24461.6	30309.5	30309.5	-24462	30310	30310
Element3	-38059.4	30309.5	30309.5	-38059	30310	30310

جدول ۲. مقایسه‌ی برش به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Shear			
	Mixed-Forced Displacement Method		Finite Element Method	
	First node	End node	First node	End node
Element1	11932.8	11932.8	11933	11933
Element2	-5650.93	-16257.5	-5651	-16258
Element3	13673.8	13673.8	13674	13674

جدول ۳. مقایسه‌ی خیز به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Deflection					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	0	0.0059822	0.0059822	0	0.005982	0.005982
Element2	1.17728e-5	-3.38699e-5	0.00018	0.000012	-0.000034	0.00018
Element3	0	0.00596476	0.003490082	0	0.005965	0.00349



شکل ۳. (a) نمودار لنگر قاب ساده با ۳ المان؛ (b) نمودار برش قاب ساده با ۳ المان؛ (c) نمودار خیز قاب ساده با ۳ المان.

محاسبه‌شده‌ی لنگر در جدول ۱، برش در جدول ۲ و خیز در جدول ۳ از روش اجزاء محدود مقایسه شده‌اند. همان‌طور که قبلاً اشاره شده است، هر عضو از قاب در تحلیل به روش عددی اجزاء محدود (به عنوان یک روش جابجایی مرسوم) به ۱۰ المان تقسیم‌بندی می‌شود، که هر یک از المان‌های تیر-ستون[6] دارای ۲ گره و هر گره نیز شامل ۳ مجهول اصلی یا ۳ درجه‌ی آزادی (جابجایی در راستای المان و عمود بر آن و دوران) است. بنابراین برای یک قاب ساده، ۳۰ المان و ۳۱ گره ایجاد شده است. با توجه به تعداد گره‌ها، تعداد درجه‌های آزادی کل ۹۳ بوده است؛ که با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و سازگاری به ۸۱ عدد کاهش یافته‌اند. برای تحلیل به روش عددی، نیاز به تشکیل ماتریس مجهول‌ها با ابعاد ماتریس ۱×۸۱ است. سپس بعد از تحلیل به روش عددی، مجهول‌ها (جابجایی‌ها و دوران) فقط در هر یک از گره‌های فرض‌شده تعیین و برای نقاط دیگر از توابع شکل استفاده می‌شوند و تحلیل ثانویه امکان‌پذیر است. همچنین برای تعیین نیروهای تکیه‌گاهی نیز به تحلیل ثانویه نیاز است. در حالی که به کمک روش پیشنهادی در پژوهش حاضر، تعداد مجهول‌ها ۱۸ است، که پس از تحلیل پاسخ‌ها در هر نقطه دقیقاً به‌دست می‌آیند. شایان ذکر است اگر در روش عددی اجزاء محدود، افزایش دقت مدنظر باشد؛ باید تعداد شبکه‌بندی المان‌ها نیز افزایش داده شود، که خود منجر به تشکیل ماتریس مجهول‌های بزرگ‌تری می‌شود و لذا زمان تلاش محاسباتی جهت تحلیل را بالا می‌برد. نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش، و خیز تعیین‌شده از روش ترکیبی در شکل ۳ مشاهده می‌شود. با مقایسه‌ی جواب‌های به‌دست‌آمده از دو روش پیشنهادی نیرو-جابجایی و اجزاء محدود مشاهده می‌شود که تفاوت ناچیزی با هم دارند.

[6] Beam-Column

جدول ۴. مقایسه‌ی لنگر به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Bending Moment					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	-11799.43975	6234.797852	6234.797852	11799	6235	6235
Element2	-6234.797852	14742.13146	14742.13146	-6235	14742	14742
Element3	-15609.8157	14037.8402	14037.8402	15610	14038	14038
Element4	704.2912628	12513.94658	12513.94658	704	12514	12514
Element5	-14804.15992	12513.94658	12513.94658	14804	-12514	12514

جدول ۵. مقایسه‌ی برش به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Shear			
	Mixed-Forced Displacement Method		Finite Element Method	
	First node	End node	First node	End node
Element1	3606.84752	3606.84752	3607	3607
Element2	3304.614138	-11695.38586	3305	-11695
Element3	5929.53118	5929.53118	5930	5930
Element4	5138.068937	-9861.931063	5138	-9862
Element5	5463.6213	5463.6213	5464	5464

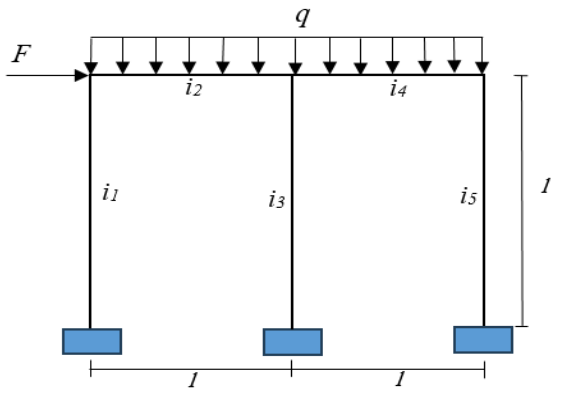
جدول ۶. مقایسه‌ی خیز به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Deflection					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	0	0.002260948	0.002260948	0	0.002261	0.002261
Element2	-6.88461e-6	-3.50697e-5	-6.88461e-6	-0.000007	-0.000035	-0.000007
Element3	0	0.002237212	0.002237212	0	0.002237	0.002237
Element4	-3.50697e-5	-2.05457e-5	1.03048e-5	-0.000035	-0.000021	0.000026
Element5	0	0.00222583	0.00222583	0	0.002226	0.002226

۲.۴. مثال دوم

قابی با ۵ عضو مطابق شکل ۴ با این مشخصات در نظر گرفته شده است.

$$l = 5m \qquad q = 3.0\times10^{3}\,\frac{N}{m}$$
$$A = 0.12m^{2} \qquad F = 15000N$$
$$I = 1.6\times10^{-3}m^{4}$$
$$E = 2.0\times10^{10}\,\frac{N}{m^{2}}$$



شکل ۴. قاب ساده‌ی ۲ دهانه با ۵ المان تحت بار گسترده و متمرکز جانبی.

۱.۲.۴. معادله‌های حاکم بر هر المان

$$W_{x_i} = \frac{q_i}{EI}\times\frac{x_i^4}{24} + c_{i,3}\times\frac{x_i^3}{6} + c_{i,4}\times\frac{x_i^2}{2} + c_{i,5}\times x_i + c_{i,6}$$

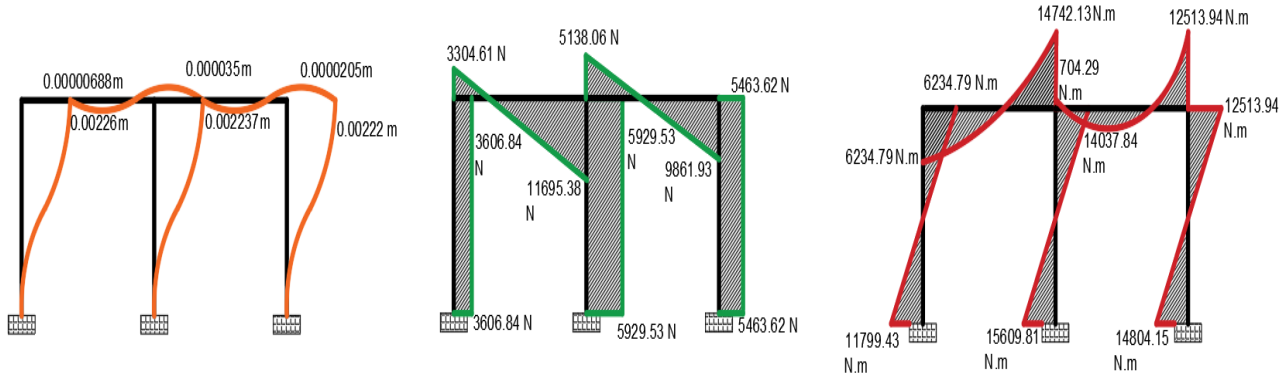
$$M_{x_i} = -q_i\times\frac{x_i^2}{2} - (c_{i,3}\times x_i + c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i} = -q_i\times x_i - c_{i,3}\times EI$$

با حل معادله‌ی ۴۲ برای شکل ۴، مقدار ماتریس C به‌دست می‌آید، که در پیوست ۲ به آن اشاره شده است.

۲.۲.۴. با قراردادن مقادیر ماتریس C در معادله‌های حاکم بر هر المان در زیربخش ۱.۲.۴، معادله‌های خیز، لنگر، و برش هر المان به‌دست می‌آیند؛ که مقادیر آن‌ها در بازه‌ی ۰ تا l تعیین و با مقادیر محاسبه‌شده‌ی لنگر در جدول ۴، برش در جدول ۵ و خیز در جدول ۶ از روش اجزاء محدود (با فرض مش‌های ۰/۵ متری) مقایسه شده است. نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش، و خیز حاصل از روش ترکیبی در شکل ۵ مشاهده می‌شود. با مقایسه‌ی جواب‌های به‌دست‌آمده از دو روش ترکیب نیرو- جابجایی و اجزاء محدود، تطابق پاسخ‌ها مشهود است.

شایان ذکر است اگر اندازه‌ی مش‌بندی در تحلیل اجزاء محدود ۵ متر (به اندازه‌ی طول عضو) لحاظ شود، قاب دو دهانه از مثال دوم به ۵ المان و ۶ گره تفکیک می‌شود. با توجه به تعداد گره‌ها، تعداد درجه‌های آزادی کل ۱۸ درجه‌ی آزادی خواهد شد؛ که با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و سازگاری، درجه‌ی آزادی به ۹ می‌رسد. بنابراین، برای تحلیل با کمک روش عددی، نیاز به تشکیل ماتریس مجهول‌ها با ابعاد ۹×۱ است. سپس بعد از تحلیل، مجهول‌ها (جابجایی‌ها و



شکل ۵. (a) نمودار لنگر قاب ساده با ۵ المان؛ (b) نمودار برش قاب ساده با ۵ المان؛ (c) نمودار خیز قاب ساده با ۵ المان.

جدول ۷. مقایسه‌ی لنگر به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Bending Moment					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	-28303.58507	18761.52331	18761.52331	-28303	18762	18762
Element2	-24611.99163	20973.79376	20973.79376	-24612	20974	20974
Element3	-31804.21711	25901.35322	25901.35322	-31804	25901	25901
Element4	-21754.26828	25866.21513	25866.21513	-21754	25866	25866
Element5	-27622.56602	17607.75527	17607.75527	-27623	17608	17608
Element6	-5850.468319	8890.46355	8890.46355	-5850	8890	8890
Element7	-8890.46355	17634.35559	17634.35559	-8890	17634	17634
Element8	-16826.70883	19984.61415	19984.61415	-16827	19985	19985
Element9	-2350.258556	15189.28529	15189.28529	-2350	15189	15189
Element10	-8258.459858	15189.28529	15189.28529	-8258	15189	15189

دوران) فقط در هر یک از گره‌های فرض‌شده تعیین می‌شوند و برای تعیین جابجایی‌های نقاط دیگر باید از توابع شکل ذکرشده استفاده کرد. در حالی که به کمک روش پیشنهادی در پژوهش حاضر با همان تعداد المان‌ها (۵ عضو)، تعداد مجهول‌ها به ۳۰ می‌رسد، که پس از تحلیل، پاسخ‌ها در هر نقطه از قاب دقیقاً به‌دست می‌آیند. بنابراین، حجم و تلاش محاسبات در روش پیشنهادی با شروط ذکرشده نسبت به روش اجزاء محدود بیشتر خواهد شد، اما دقت روش پیشنهادی همچنان بیشتر است.

۳.۴. مثال سوم

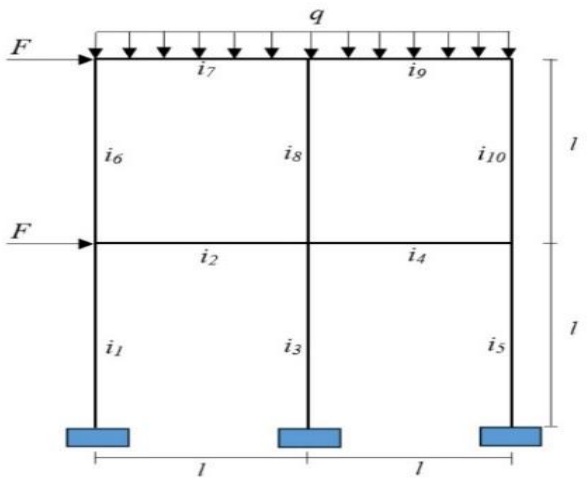
قابی با ۱۰ عضو مطابق شکل ۶ با این مشخصات در نظر گرفته شده است.

$$l = 5m \qquad q = 3.0\times10^{3}\ \frac{N}{m}$$

$$A = 0.12m^{2} \qquad F = 15000N$$

$$I = 1.6\times10^{-3}\ m^{4}$$

$$E = 2.0\times10^{10}\ \frac{N}{m^{2}}$$



شکل ۶. قاب ساده‌ی ۲ دهنه و ۲ طبقه با ۱۰ المان تحت بار گسترده و متمرکز جانبی.

۱.۳.۴. معادله‌های حاکم بر هر المان

$$W_{x_i} = \frac{q_i}{EI}\times\frac{x_i^{4}}{24} + c_{i,3}\times\frac{x_i^{3}}{6} + c_{i,4}\times\frac{x_i^{2}}{2} + c_{i,5}\times x_i + c_{i,6}$$

$$M_{x_i} = -q_i\times\frac{x_i^{2}}{2} - (c_{i,3}\times x_i + c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i} = -q_i\times x_i - c_{i,3}\times EI$$

با حل معادله‌ی ۴۲ برای شکل ۶، مقدار ماتریس C به‌دست می‌آید، که در پیوست ۳ به آن اشاره شده است.

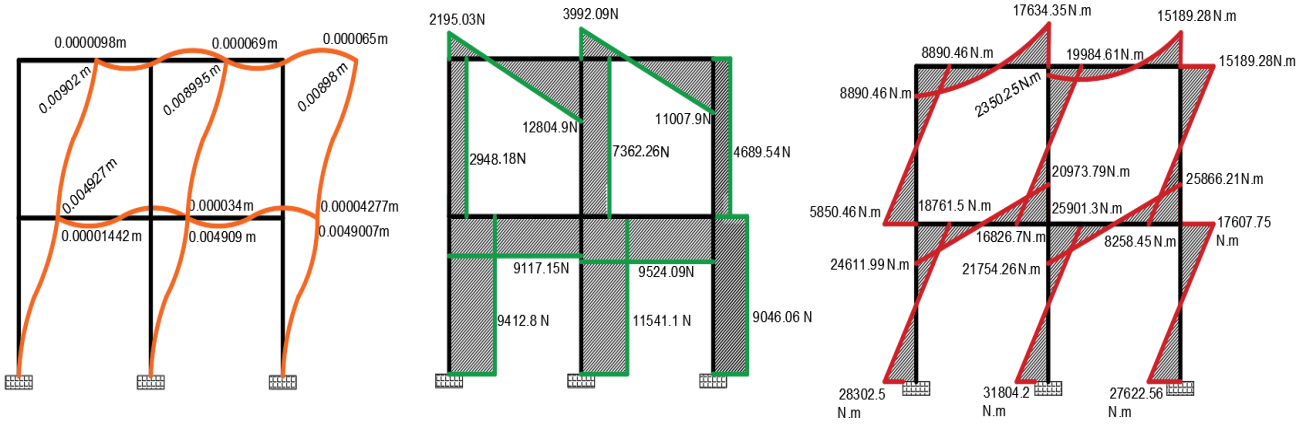
۲.۳.۴. با قراردادن مقادیر ماتریس C در معادله‌های حاکم بر هر المان در زیربخش ۱.۳.۴؛ معادله‌های خیز، لنگر، و برش هر المان به‌دست می‌آیند؛ که در بازه‌ی ۰ تا l (طول المان) تعیین می‌شوند و با مقادیر محاسبه‌شده‌ی لنگر در جدول ۷، برش در جدول ۸، و خیز در جدول ۹ از روش اجزاء محدود مقایسه

جدول ۸. مقایسه‌ی برش به‌دست‌آمده از روش ترکیب نیرو- جابجایی با روش اجزاء محدود.

Number of Element	Shear			
	Mixed-Forced Displacement Method		Finite Element Method	
	First node	End node	First node	End node
Element1	9412.821677	9412.821677	9413	9413
Element2	-9117.157079	-9117.157079	-9117	-9117
Element3	11541.11406	11541.11406	11541	11541
Element4	-9524.096684	-9524.096684	-9524	-9524
Element5	9046.064258	9046.064258	9046	9046
Element6	2984.186374	2984.186374	2984	2984
Element7	2195.036171	-12804.96383	2195	-12805
Element8	7362.264596	7362.264596	7362	7362
Element9	3992.091231	-11007.90877	3992	-11008
Element10	4689.54903	4689.54903	4690	4690

جدول ۹. مقایسه‌ی خیز بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود.

Number of Element	Deflection					
	Mixed-Forced Displacement Method			Finite Element Method		
	First node	End node	Max value	First node	End node	Max value
Element1	0	0.004927558	0.004927558	0	0.004928	0.004928
Element2	1.44211e-5	-3.41461e-5	0.000146785	0.000014	-0.000034	0.000147
Element3	0	0.004909776	0.004909776	0	0.00491	0.00491
Element4	-3.41461e-5	-4.2775e-5	0.000385077	-0.000034	-0.000043	0.000385
Element5	0	0.0049007	0.0049007	0	0.004901	0.004901
Element6	0.004927558	0.009020482	0.009020482	0.004928	0.00902	0.00902
Element7	9.84809e-6	-6.91399e-5	9.84809e-6	0.00001	-0.000069	0.00001
Element8	0.004909776	0.008995375	0.008995375	0.00491	0.008995	0.008995
Element9	-6.91399e-5	-6.57082e-5	4e-6	-0.000069	-0.000066	0.000004
Element10	0.0049007	0.008985605	0.008985605	0.004901	0.008986	0.008986



شکل ۷. (a) نمودار لنگر قاب ساده با ۱۰ المان؛ (b) نمودار برش قاب ساده با ۱۰ المان؛ (c) نمودار خیز قاب ساده با ۱۰ المان.

شده‌اند، که تطابق خوبی دارند. در شکل ۷، نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش، و خیز حاصل از روش پیشنهادی مشاهده می‌شود. از مزیت روش پیشنهادی می‌توان به حل دقیق قاب، سهولت استفاده، و در دسترس‌بودن پاسخ در هر نقطه بدون نیاز به انتخاب گره و درنظرگرفتن آثار محوری اعضاء قاب اشاره کرد.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش ترکیبی نیرو- جابجایی بهمنظور تحلیل قاب‌های صفحه‌ای دوبُعدی ارائه شده است؛ که با درنظرگرفتن همزمان شرایط تعادل و سازگاری، دستگاه معادله‌های حاکم بر قاب‌های صفحه‌ای را تشکیل می‌دهند. ابتدا معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر اعضاء تک‌محوری در مختصات محلی تولید و با انتگرال‌گیری، ثابت‌های انتگرالی به‌عنوان متغیرهای مجهول مسئله در نظر گرفته شده‌اند. الگوریتم روش پیشنهادی به‌سادگی قابل پیاده‌سازی در قالب کد رایانه‌ای است و می‌تواند به‌عنوان جایگزینی برای روش‌های مرسوم تحلیل قاب‌ها استفاده شود. از مزیت‌های روش ترکیبی می‌توان به یافتن پاسخ دقیق در هر نقطه از سازه بدون نیاز به شبکه‌بندی، الگوریتم ساده و قابل تعمیم، سادگی حل برای قاب‌های نامعین، و عدم نیاز به پس‌پردازش اشاره کرد. به‌منظور روشن‌سازی کارایی روش مذکور، سه قاب صفحه‌ای با افزایش تدریجی اعضا و دهانه‌ها تحلیل شده‌اند. راستی‌آزمایی روش با مقایسه‌ی پاسخ ها با روش اجزاء محدود صورت پذیرفته است؛ که نتایج به‌دست‌آمده، تطابق پاسخ‌ها را نشان می‌دهند و نمودارهای برش، خمش، و تغییرمکان قاب‌های انتخابی رسم شده‌اند.

References -منابع

1. Macaulay, W., 1919. Note on the deflection of beams. *The Messenger of Mathematics, 48*pp. 129-130
2. Brungraber, R., 1965. Singularity functions in the solution of beam-deflection problems. *Journal of Engineering Education (Mechanics Division Bulletin), 1*(9)pp. 278-280
3. Falsone, G., 2002. The use of generalised functions in the discontinuous beam bending differential equations. *International Journal of Engineering Education, 18*(3)pp. 337-343
4. Rahami, H ., Kaveh, A ., Asl, MA ., Mirghaderi, S., 2015. Finite element analysis using mixed force-displacement method via singular value decomposition. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering, 39*(C1)pp. 1. [In Persian]. https://doi.org/10.22099/ijstc.2015.2736.
5. Xu, G ., Chen, Q ., Zhu, S ., Wang, Z ., Wu, B., 2018. Force-Displacement Mixed Control Method for 3-DOFs Loading System. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science), 34*(4)pp. 586-595.https://doi.org/10.11717/j.issn:2095-1922.2018.04.02
6. Pan, P ., Zhao, G ., Lu, X ., Deng, K., 2014. Force–displacement mixed control for collapse tests of multistory buildings using quasi-static loading systems. *Earthquake engineering & structural dynamics, 43*(2)pp. 287-300. https://doi.org/10.1002/eqe.2344
7. Pan, P ., Nakashima, M ., Tomofuji, H., 2005. Online test using displacement–force mixed control. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 34*(8)pp. 869-888. https://doi.org/10.1002/eqe.457
8. Zhou, H ., Wang, T ., Du, C ., Chen, C., 2021. Multi-degree-of-freedom force-displacement mixed control strategy for structural testing. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 50*(2)pp. 354-374.https://doi.org/10.1002/eqe.3334
9. Jiang, Z., 2021. Programming for matrix displacement method based on MATLAB. *Proceedings of the 2021 4th International Conference on Mathematics and Statistics.*pp. 35-41.https://doi.org/10.1145/3475827.3475833
10. Li, Z., 2021. Development of Program for Solving Plane Rigid Frame Based on MATLAB. *2021 IEEE 12th International Conference on Mechanical and Intelligent Manufacturing Technologies (ICMIMT). IEEE*,pp. 64-67. https://doi.org/10.1109/ICMIMT52186.2021.9476148
11. Khennane, A., 2013.*Published: CRC Press*. Introduction to finite element analysis using MATLAB® and abaqus.
12. McNeice, G ., Hunnisett, S., 1972. Mixed-displacement finite-element analysis with particular application using plane-stress triangles. *Journal of Strain Analysis, 7*(4)pp. 243-252.https://doi.org/10.1243/03093247V074243
13. Liu, H., 2021. Internal Force Solution of Plane Rigid Frame Based on Matrix Displacement Method. *International Conference on Architecture, Materials and Construction. Springer*,pp. 58-64.https://doi.org/10.1007/978-3-030-94514-5_7
14. Qi, H., 2020. Calculation of Frame Internal Force Based on MATLAB Matrix Displacement Method. *International Conference on Computing and Data Science (CDS). IEEE*,pp. 367-372.https://doi.org/10.1109/CDS49703.2020.00077
15. Falsone, G ., Settineri, D., 2013. A Mixed Force-Displacement Method for the Exact Solution of Plane Frames. *American Journal of Civil Engineering and Architecture, 1*(4)pp. 82-91.https://doi.org/10.12691/ajcea-1-4-3
16. Shahabian, F ., Alamatian, J., 2012. Stochastic Nonlinear Dynamic Analysis of Portal Frames in Random Fields. *Journal of Civil and Surveying Engineering, 45*(6)pp. 659-670. [In Persian].
17. Mohemmi, M ., Broujerdian, V ., Rajaeian, P., 2020. An equivalent method for bar slip simulation in reinforced concrete frames. *International Journal of Civil Engineering, 18*pp. 851-863.https://doi.org/10.1007/s40999-020-00507-6
18. Sae-Long, W ., Limkatanyu, S ., Hansapinyo, C ., Imjai, T ., Kwon, M., 2020. Forced-based shear-flexure-interaction frame element for nonlinear analysis of non-ductile reinforced concrete columns. *Journal of Applied and Computational Mechanics,* pp.https://doi.org/10.22055/JACM.2020.32731.2065
19. Sabet Rasekh, M ., Behnamfar, F., 2020. Displacement-Based Design Of Torsional Buildings Considering Two-Way Nonlinearities. *Sharif Journal of Civil Engineering, 36.2*(1.1)pp. 69-77. [In Persian].https://doi.org/10.24200/j30.2018.5713.2269
20. M Kani, I ., Moghaddasi Bonab, N., 2009. Computer Program For Analysis Of Substitute Frame Of Flat Slabs And Slabs Supported On Beams. *Sharif Journal of Civil Engineering, 24*(46.1)pp. 95-102. [In Persian].
21. Thai, H-T ., Nguyen, T-K ., Lee, S ., Patel, VI ., Vo, TP., 2020. Review of nonlinear analysis and modeling of steel and composite structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics, 20*(04)pp. 2030003.https://doi.org/10.1142/S0219455420300037
22. Namadchi, A ., Alamatian, J ., Mohammadelahi Arehkamar, H., 2022. Semi-explicit Unconditionally

Stable Time Integration method based on Generalized-α technique. *Sharif Journal of Civil Engineering, 37*(4.1)pp. 135-145. [In Persian].https://doi.org/10.24200/j30.2021.55958.2792

23. Limkatanyu, S ., Spacone, E., 2002. Reinforced concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations. *Journal of Structural Engineering, 128*(3)pp. 346-355.https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:3(346)

24. Sepulveda, C ., Mosqueda, G., 2023. Performance assessment of a mixed displacement and force control mode for hybrid simulation. *13th Chilean Conference of Seismology and Earthquake Engineering*.pp.

25. Sepulveda, C ., Mosqueda, G ., Wang, KJ ., Huang, PC ., Huang, CW ., Uang, CM ., Chou, CC., 2024. Hybrid simulation framework with mixed displacement and force control for fully compatible displacements. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 53*(2)pp. 838-855.https://doi.org/10.1002/eqe.4048

26. Pian, C ., Qian, J ., Muho, EV ., Beskos, DE., 2020. A hybrid force/displacement seismic design method for reinforced concrete moment resisting frames. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 129*pp.https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.09.002

27. Mohammad Rezaiee-Pajand, AAS., 2010. Extending Kani Method for Analysis of Braced Frames. *Journal of Structure & Steel, 6*(8)pp. 83-98. [In Persian].

28. Khabiri, A ., Javadi, AS., 2022. Vibration analysis of buried pipelines and piles using differential transformation method. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational Mechanics, 175*(2)pp. 83-90.https://doi.org/10.1680/jencm.21.00013

29. Alaneme, GU ., Bahrami, A ., Ibe Iro, U ., Ganasen, N ., Otu, ON ., Udeala, RC ., Ifebude, BO ., Onwusereaka, EA., 2023. Numerical Analysis and Parametric Study on Multiple Degrees-of-Freedom Frames. *Civil Engineering Journal, 9*(7)pp. 1709-1736.https://doi.org/10.28991/CEJ-2023-09-07-012

30. Colombo, IG ., Colombo, M ., di Prisco, M ., Magri, A ., Martinelli, P ., Mazzoleni, L ., Zani, G., 2023.*Published: Springer*. Solution of Complex Frames. Structural Analysis of Plane Frames: Solved Examples with Force and Displacement Methods.https://doi.org/10.1007/978-3-031-35267-6_3

31. Connor, JJ ., Faraji, S., 2016. Finite Element Displacement Method for Framed Structures. *Fundamentals of Structural Engineering,* pp. 805-869.https://doi.org/10.1007/978-3-319-24331-3_12

32. Karnovsky, IA ., Lebed, O., 2021. The Displacement Method. *Advanced Methods of Structural Analysis,* pp. 367-403.https://doi.org/10.1007/978-3-030-44394-8_10

33. Toniolo, G., 2019. Displacement Method. *Introduction to Frame Analysis: First and Second Order Theories,* pp. 157-275.https://doi.org/10.1007/978-3-030-14664-1_3

34. Kien, ND., 2004. Beam element for large displacement analysis of elasto-plastic frames. *Vietnam Journal of Mechanics, 26*(1)pp. 39-54.https://doi.org/10.15625/0866-7136/26/1/5688

35. Krenk, S ., Høgsberg, J ., Krenk, S ., Høgsberg, J., 2013. Deformation and Element Methods for Frames. *Statics and Mechanics of Structures,* pp. 267-320.https://doi.org/10.1007/978-94-007-6113-1_7

36. Rezaiee-Pajand, M ., Gharaei-Moghaddam, N., 2017. Frame nonlinear analysis by force method. *International Journal of Steel Structures, 17*pp. 609-629.https://doi.org/10.1007/s13296-017-6019-3

37. Raju, NK ., Nagabhushanam, J., 2000. Nonlinear structural analysis using integrated force method. *Sadhana, 25*pp. 353-365.https://doi.org/10.1007/BF03029720

38. Wang, Y ., Senatore, G., 2020. Extended integrated force method for the analysis of prestress-stable statically and kinematically indeterminate structures. *International Journal of Solids and Structures, 202*pp. 798-815.https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.029

39. Zhang, SY ., Dong, MH., 2014. A Transfer Matrix Method for Frame Shear Wall Structures. *Applied Mechanics and Materials, 482,* pp. 207-212.https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.482.207

40. Tzimas, AS ., Karavasilis, TL ., Bazeos, N ., Beskos, D., 2013. A hybrid force/displacement seismic design method for steel building frames. *Engineering Structures, 56*pp. 1452-1463.https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.07.014

41. Mazzoni, S ., McKenna, F ., Scott, MH ., Fenves, GL., 2006. OpenSees command language manual. *Pacific earthquake engineering research (PEER) center, 264*(1)pp. 137-158

42. McKenna, F., 2011. OpenSees: a framework for earthquake engineering simulation. *Computing in Science & Engineering, 13*(4)pp. 58-66.https://doi.org/10.1109/MCSE.2011.66

پیوست ۱ (مقادیر به‌دست‌آمده‌ی ماتریس c برای مثال اول)

$$c_1^1 = 0.2354552680462094\times10^{-5}$$

$$c_1^2 = 0$$

$$c_1^3 = -37.290031773506646\times10^{-5}$$

$$c_1^4 = 110.00762360632475\times10^{-5}$$

$$c_1^5 = 0$$

$$c_1^6 = 0$$

$$c_2^1 = -0.1277995763532447\times10^{-5}$$

$$c_2^2 = 598.219633131004\times10^{-5}$$

$$c_2^3 = 17.659145103465697\times10^{-5}$$

$$c_2^4 = -76.44253526120848\times10^{-5}$$

$$c_2^5 = 83.91272086279045\times10^{-5}$$

$$c_2^6 = -1.1772763402310474\times10^{-5}$$

$$c_3^1 = -0.6773970062878016\times10^{-5}$$

$$c_3^2 = 0$$

$$c_3^3 = -42.730598594612775\times10^{-5}$$

$$c_3^4 = 118.93572679664533\times10^{-5}$$

$$c_3^5 = 0$$

$$c_3^6 = 0$$

پیوست ۲ (مقادیر به‌دست‌آمده‌ی ماتریس c برای مثال دوم)

$$c_1^1 = -1.376922557393458\times10^{-6} \qquad c_1^2 = 0$$

$$c_1^3 = -112.71398501108096\times10^{-6} \qquad c_1^4 = 368.73249218731557\times10^{-6}$$

$$c_1^5 = 0 \qquad c_1^6 = 0$$

$$c_2^1 = 4.747146866518923\times10^{-6} \qquad c_2^2 = 2260.948131277258\times10^{-6}$$

$$c_2^3 = -103.26919180450917\times10^{-6} \qquad c_2^4 = -194.83743286808874\times10^{-6}$$

$$c_2^5 = 434.73764829806544\times10^{-6} \qquad c_2^6 = 6.884612786967266\times10^{-6}$$

$c_3^1 = -7.013939499782052\times10^{-6}$ $c_3^2 = 0$

$c_3^3 = -185.29784937038561\times10^{-6}$ $c_3^4 = 487.8067407062156\times10^{-6}$

$c_3^5 = 0$ $c_3^6 = 0$

$c_4^1 = -2.276508874913778\times10^{-6}$ $c_4^2 = 2237.212396944662\times10^{-6}$

$c_4^3 = -160.564654288163\times10^{-6}$ $c_4^4 = 22.009101963653204\times10^{-6}$

$c_4^5 = 122.81058640125665\times10^{-6}$ $c_4^6 = 35.06969749891038\times10^{-6}$

$c_5^1 = -4.109137942824491\times10^{-6}$ $c_5^2 = 0$

$c_5^3 = -170.73816561853335\times10^{-6}$ $c_5^4 = 462.6299975698297\times10^{-6}$

$c_5^5 = 0$ $c_5^6 = 0$

پیوست ۳ (مقادیر به‌دست‌آمده‌ی ماتریس c برای مثال سوم)

$c_1^1 = 0.2884217044890889\times10^{-5}$ $c_1^2 = 0$

$c_1^3 = -29.41506774151249\times10^{-5}$ $c_1^4 = 88.4455783553693\times10^{-5}$

$c_1^5 = 0$ $c_1^6 = 0$

$c_2^1 = -0.3556401956926527\times10^{-5}$ $c_2^2 = 492.7558181606057\times10^{-5}$

$c_2^3 = 28.49111587189769\times10^{-5}$ $c_2^4 = -76.91247385029613\times10^{-5}$

$c_2^5 = 74.53954500794028\times10^{-5}$ $c_2^6 = -1.4421085224454455\times10^{-5}$

$c_3^1 = -0.6829214772844596\times10^{-5}$ $c_3^2 = 0$

$c_3^3 = -36.065981452242313\times10^{-5}$ $c_3^4 = 99.38817846164188\times10^{-5}$

$c_3^5 = 0$ $c_3^6 = 0$

$c_4^1 = -0.1815214678391231\times10^{-5}$ $c_4^2 = 490.9776171821422\times10^{-5}$

$c_4^3 = 29.762802135959387\times10^{-5}$ $c_4^4 = -67.98208838870316\times10^{-5}$

$c_4^5 = 46.11612415518059\times10^{-5}$ $c_4^6 = 3.414607386422305\times10^{-5}$

$c_5^1 = -0.8555002272046297\times10^{-5}$ $c_5^2 = 0$

$c_5^3 = -28.26895080624522\times10^{-5}$ $c_5^4 = 86.32051879784443\times10^{-5}$

$c_5^5 = 0$ $c_5^6 = 0$

$c_6^1 = -0.091459840469547\times10^{-5}$ $c_6^2 = 1.4421085224454451\times10^{-5}$

$c_6^3 = -9.213082418461455\times10^{-5}$ $c_6^4 = 18.282713498103068\times10^{-5}$

$c_6^5 = 74.5395450079402\times10^{-5}$ $c_6^6 = 492.7558181606057\times10^{-5}$

$c_7^1 = -0.5021589010871805\times10^{-5}$ $c_7^2 = 902.0482448753133\times10^{-5}$

$c_7^3 = -6.859488035215988\times10^{-5}$ $c_7^4 = -27.78269859420432\times10^{-5}$

$c_7^5 = 50.78958226768675\times10^{-5}$ $c_7^6 = -0.984809320097716\times10^{-5}$

$c_8^1 = -0.6998772941386157\times10^{-5}$ $c_8^2 = -3.414607386422298\times10^{-5}$

$c_8^3 = -23.00707686322756\times10^{-5}$ $c_8^4 = 52.58346509832587\times10^{-5}$

$c_8^5 = 46.11612415518052\times10^{-5}$ $c_8^6 = 490.97761718214245\times10^{-5}$

$c_9^1 = -0.1953978762441461\times10^{-5}$ $c_9^2 = 899.5374503698778\times10^{-5}$

$c_9^3 = -12.475285095612197\times10^{-5}$ $c_9^4 = -7.344557988096302\times10^{-5}$

$c_9^5 = 21.444988856465075\times10^{-5}$ $c_9^6 = 6.913993857115411\times10^{-5}$

$c_{10}^1 = -0.4586628653918375\times10^{-5}$ $c_{10}^2 = -4.277501136023145\times10^{-5}$

$c_{10}^3 = -14.65484071831097\times10^{-5}$ $c_{10}^4 = 25.80768705771217\times10^{-5}$

$c_{10}^5 = 78.2407089111572\times10^{-5}$ $c_{10}^6 = 490.070009842947\times10^{-5}$